

EXERCICE 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0 ; +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

démontrer que la courbe \mathcal{C}_f possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = (1 - x) e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \frac{367}{1000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$:

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

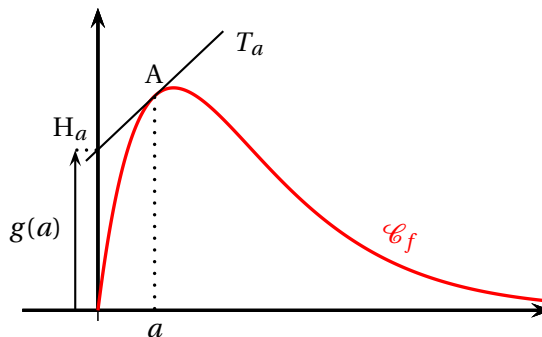
6. Soit a un réel appartenant à $[0 ; +\infty[$ et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a .

On note T_a la tangente à \mathcal{C}_f en A .

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



- a.** Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = [(1 - a) e^{-a}] x + a^2 e^{-a}.$$

- b.** En déduire l'expression de $g(a)$.
- c.** Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.